Расчет скорости и времени таяния льда в трубчатом аккумуляторе холода

Семенов Юрий Владимирович

1. Постановка задачи

Так как труба обладает осевой симметрией, температурное поле в трубе и в слое льда будет одномерным, если в качестве координаты взять радиус. А изотермические поверхности — цилиндрическими, имеющими общую ось с трубой.

При этом физические величины (количество теплоты и т.д.) приводятся к единице длины трубы [5].

Полагаем, что в начальный момент времени ($\tau = 0$) толщина льда равна $\delta_Н$, а в момент времени τ лед имеет толщину $\delta_Л$ ($\delta_Л < \delta_Н$):

$$\delta_Л = r - r_0,$$

где r_0 — наружный радиус трубы,

r — текущий радиус внешней поверхности льда, имеющей температуру 0 °С (рис. 1).

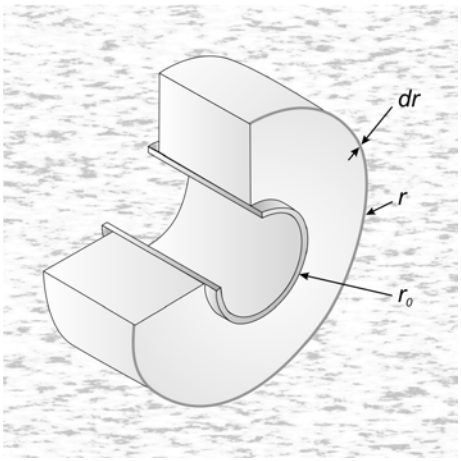


Рис. 1. *Условные обозначения*

Таяние льда происходит за счет теплоотдачи от воды, контактирующей с наружной поверхностью льда. Средняя температура воды $t_В$, окружающей лед в аккумуляторе холода, обычно изменяется по длине аккумулятора от ≈ +5…+7 °С до ≈ +1…+2 °С. За счет плавления льда вода охлаждается при прохождении по льдоаккумулятору с ≈ +6 °С до ≈ 0,1…+0,5 °С.

Чтобы за малый промежуток времени $d\tau$ на наружной поверхности льда растаял слой толщиной dr (радиус наружной поверхности r уменьшился на dr), к нему необходимо

© Семенов Ю.В., 2024

подвести количество теплоты Q_1, равное массе льда *m* слоя толщиной *dr*, умноженной на удельную теплоту плавления льда *h*:

$$Q_1 = m \cdot h$$

где Q_1 — количество теплоты, Дж/м;

m — масса льда, кг/м;

h — удельная теплота плавления льда, Дж/кг;

Масса *m* может быть определена как произведение плотности льда ρ на объем слоя льда толщиной *dr*, то есть:

$$m = \rho \cdot 2\pi r \cdot dr$$

где ρ — плотность льда, кг/м^3;

$2\pi r$ — длина окружности поверхности льда, м.

Тогда

$$Q_1 = \rho \cdot h \cdot 2\pi r \cdot dr \qquad (1)$$

С другой стороны, за время $d\tau$ через слой льда толщиной *dr* проходит количество теплоты Q_2 (Дж/м) равное:

$$Q_2 = (q_2 - q_1) \cdot d\tau, \quad (2)$$

где q_1 — удельный тепловой поток, отводимый от поверхности внутрь слоя льда, Вт/м;

q_2 — удельный тепловой поток, подводимый к поверхности льда от воды, Вт/м;

$d\tau$ — промежуток времени, с.

Если на поверхности происходит таяние льда, то $Q_1 = Q_2$ или:

$$\rho \cdot h \cdot 2\pi r \cdot dr = (q_2 - q_1) \cdot d\tau \ (3)$$

Откуда получим дифференциальное уравнение, связывающее время и радиус фронта таяния:

$$d\tau = \frac{2\pi \cdot \rho \cdot h \cdot r}{q_2 - q_1} dr \qquad (4)$$

Интегрируя это выражение, мы получим зависимость $\tau = f(r)$, откуда легко получить взаимосвязь толщины и времени таяния льда.

Уменьшение *r* при таянии льда учтем инверсией пределов интегрирования этого выражения.

Рассмотрим, как может быть решена эта задача при различных граничных условиях.

© Семенов Ю.В., 2024

2. Условия третьего рода внутри трубы и на внешней поверхности льда

Задание граничных условий третьего рода на внутренней поверхности трубы предполагает, что внутри трубы находится жидкость, имеющая отрицательную температуру t_X, и между поверхностью трубы и жидкостью происходит постоянный теплообмен. Отрицательная температура жидкости внутри трубы обеспечивается холодильной установкой.

Для дальнейших расчетов принимаем плотность льда ρ = 917 кг/м^3, удельную теплоту плавления льда h = 333 кДж/кг = 3,33·10^5 Дж/кг, коэффициент теплопроводности льда $\lambda_Л$= 2,3 Вт/(м·К).

Рассматриваем трубу из нержавеющей стали (коэффициент теплопроводности 16 Вт/(м·К)) с наружным диаметром 20 мм и толщиной стенки 1 мм.

Тепловой поток q_1, отводимый от поверхности внутрь слоя льда, может быть определен по известной формуле для двухслойной цилиндрической стенки [5], которая при замене диаметров на радиусы примет следующий вид:

$$q_1 = \frac{2\pi \cdot \Delta t_1}{\frac{1}{\alpha_X \cdot r_1} + \frac{1}{\lambda_T}\ln(r_0/r_1) + \frac{1}{\lambda_Л}\ln(r/r_0)}, \qquad (5)$$

где q_1 — тепловой поток, приведенный к единице длины трубы, Вт/м;

Δt_1 — разность температур поверхности льда (0 °С) и температуры жидкости внутри трубы t_X, К;

α_X — коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности трубы, Вт/(м^2·К);

$\lambda_Л$ — коэффициент теплопроводности льда, Вт/(м·К);

λ_T — коэффициент теплопроводности материала трубы, Вт/(м·К);

r — текущий внешний радиус льда, м;

r_0 — внешний радиус трубы, м;

r_1 — внутренний радиус трубы, м.

В качестве постоянной температуры жидкости внутри трубы t_X = *const* обычно принимается средняя температура хладоносителя или расчетная температура кипения хладагента внутри трубы.

Полагая, что характеристики трубы и условия теплоотдачи на внутренней поверхности трубы не изменяются, обозначим:

$$A = \frac{1}{\alpha_X \cdot r_1} + \frac{1}{\lambda_T}\ln(r_0/r_1) = const \qquad (6)$$

© Семенов Ю.В., 2024

Получим

$$q_1 = \frac{2\pi \cdot \Delta t_1}{A + \frac{1}{\lambda_Л} \ln(r/r_0)} \quad (7)$$

На рис. 2 приведена зависимость q_1 от толщины льда при различных коэффициентах теплоотдачи на внутренней поверхности трубы и t_X = –10 °C (Δt_1= 10 К).

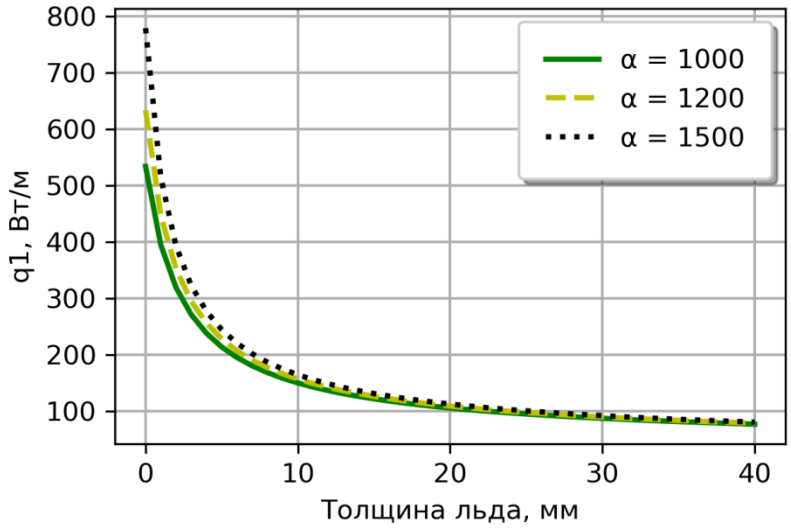


Рис. 2. *Зависимость q_1 от толщины льда*

Из графика следует, что зависимость q_1 от толщины обратно пропорциональна и практически не зависит от значения α_X.

Задание граничных условий третьего рода на внешней границе льда предполагает, что температура воды всегда выше 0 °C. При этом происходит постоянный теплообмен между водой и поверхностью льда, имеющей нулевую температуру.

Тогда тепловой поток q_2, подводимый к наружной поверхности льда от воды, может быть определен по известной формуле [5]:

$$q_2 = \alpha_В \cdot 2\pi \cdot r \cdot \Delta t_2, \quad (8)$$

где q_2 — тепловой поток, приведенный к единице длины трубы, Вт/м;

Δt_2 — разность температур воды $t_В$ и поверхности льда (0 °C), К;

$\alpha_В$ — коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности льда, Вт/(м^2·К);

r — текущий внешний радиус наружной поверхности льда, м.

По данным [6] при естественной конвекции коэффициент теплоотдачи на наружной поверхности льда повышается с 116 Вт/(м^2·К) при +6 °C до ≈170 Вт/(м^2·К) при +2 °C. За счет барботажа в современных льдоаккумуляторах $\alpha_В$ составляет от 350 до 850 Вт/(м^2·К) в зависимости от расхода воздуха [7].

© Семенов Ю.В., 2024

В качестве расчетного может быть принято значение $\alpha_В$ = 500 Вт/(м^2·К) [2].

На рис. 3 представлена зависимость q_2 от толщины льда для различных значений $\alpha_В$ при $\Delta t_2 = 2$ К, а на рис. 4 — зависимость q_2 от толщины льда для различных значений Δt_2 при $\alpha_В$ = 500 Вт/(м^2·К).

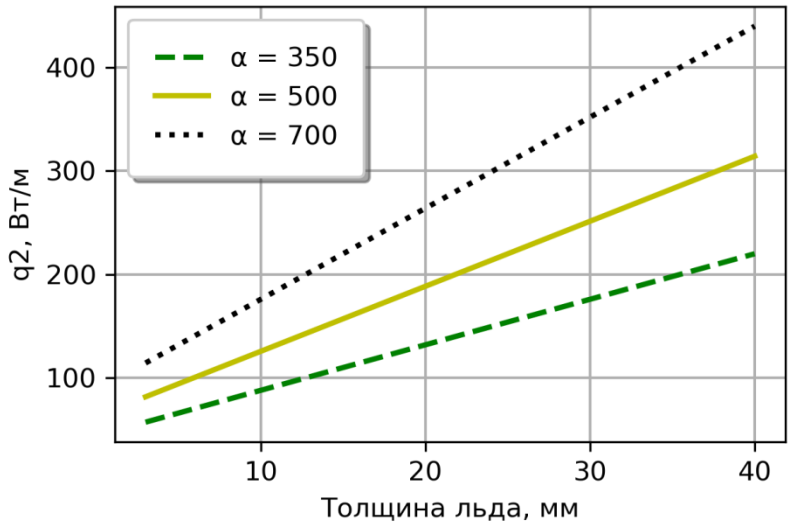


Рис. 3. *Зависимость q_2 от толщины льда*

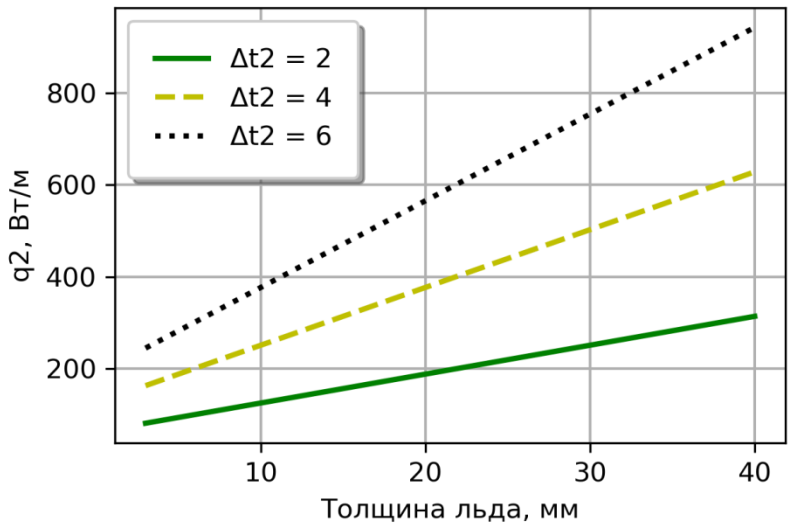


Рис. 4. *Зависимость q_2 от толщины льда*

Из рис. 3 и 4 видно, что q_2 прямо пропорциональна толщине льда, так как с ростом толщины линейно возрастает длина окружности наружной поверхности льда.

Подставляя выражения для q_1 и q_2 в формулу (4), получим:

$$d\tau = \frac{\rho \cdot h \cdot 2\pi r}{\alpha_В \cdot 2\pi \cdot r \cdot \Delta t_2 - \frac{2\pi \cdot \Delta t_1}{A + \frac{1}{\lambda_Л}\ln(r/r_0)}} dr$$

© Семенов Ю.В., 2024

или

$$d\tau = \frac{\rho \cdot h \cdot r}{\alpha_{\text{В}} \cdot r \cdot \Delta t_2 - \frac{\Delta t_1}{A + \frac{1}{\lambda_{\text{Л}}} \ln(r/r_0)}} dr.$$

Так как при таянии льда уменьшается радиус его наружной поверхности, чтобы получить зависимость τ от r, необходимо проинтегрировать это выражение в пределах от текущего радиуса r до начального радиуса наружной поверхности $r_{\text{Н}}$ ($r_{\text{Н}} = r_0 + \delta_{\text{Н}}$):

$$\int_0^{\tau} d\tau = \int_r^{r_{\text{Н}}} \frac{\rho \cdot h \cdot r}{\alpha_{\text{В}} \cdot r \cdot \Delta t_2 - \frac{\Delta t_1}{A + \frac{1}{\lambda_{\text{Л}}} \ln(r/r_0)}} dr. \quad (9)$$

Полученный интеграл (9) может быть взят только численным методом.

Однако мы можем получить графическую интерпретацию совместной работы льдоаккумулятора и холодильной установки, совместив на одном графике зависимости q_1 и q_2 от толщины льда.

На рис. 5 представлены зависимости от толщины льда q_1 (при $\alpha_{\text{Х}}$ = 1000 Вт/(м^2·К) и $t_{\text{Х}}$ = –10 °С) и q_2 (при $\alpha_{\text{В}}$ = 500 Вт/(м^2·К) и различных значениях Δt_2).

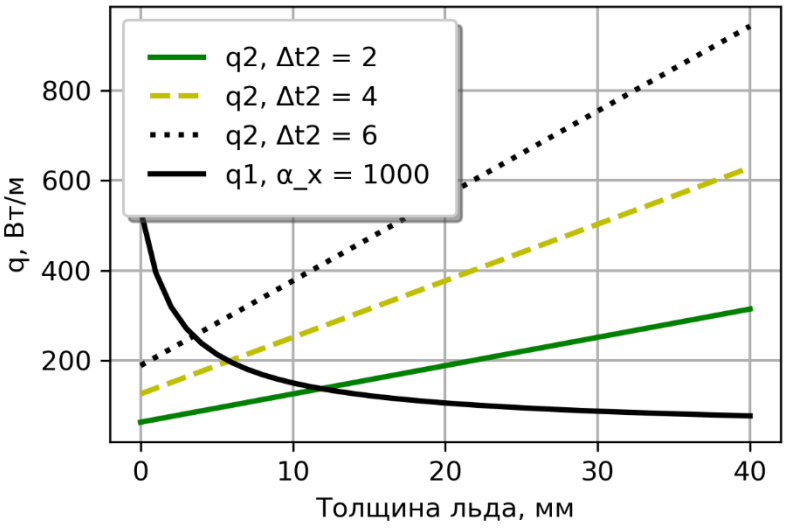


Рис. 5. *Зависимость q_1 и q_2 от толщины льда*

Из рисунка видно, что графики q_2 пересекают график q_1 в различных точках в зависимости от Δt_2 (температуры воды в °С).

Левее этих точек $q_1 > q_2$, и таяния льда не происходит, так как теплоотвод внутрь слоя льда больше поступления тепла от воды.

© Семенов Ю.В., 2024

Правее этих точек $q_2 > q_1$, и происходит таяние льда, несмотря на работу холодильной установки.

Каждой точке $q_2 = q_1$ соответствует своя «критическая» толщина льда, при достижении которой таяние льда прекращается при данных условиях.

3. Условия первого рода внутри и третьего рода на внешней границе льда

Как показано автором в [4], при практических расчетах времени намораживания льда на поверхности трубы целесообразно перейти от условий третьего рода внутри трубы, к условиям первого рода на внутренней поверхности льда (наружной поверхности трубы). Применим этот подход и для расчета скорости и времени таяния цилиндрического слоя льда, намороженного на поверхности трубы.

Для упрощения задачи полагаем, что внутренняя поверхность льда, контактирующая с трубой (при радиусе r_0), имеет постоянную температуру $t_C < 0$ °C.

При $t_C = const$ тепловой поток q_1, отводимый от поверхности внутрь слоя льда, может быть определен в каждый момент времени по известной формуле для цилиндрической стенки [5]:

$$q_1 = \frac{2\pi \cdot \Delta t_1^*}{\frac{1}{\lambda_Л}\ln(r/r_0)},$$

где q_1 — тепловой поток, приведенный к единице длины трубы, Вт/м;

Δt_1^*— разность температур поверхности льда (0 °C) и температуры внутреннего слоя льда t_C, К;

$\lambda_Л$— коэффициент теплопроводности льда, Вт/(м·К);

r — текущий внешний радиус льда, м;

r_0— внутренний радиус льда (внешний радиус трубы), м;

Подставляя выражения для q_1 и q_2 в (4), получим:

$$d\tau = \frac{\rho \cdot h \cdot r}{\alpha_В \cdot r \cdot \Delta t_2 - \frac{\Delta t_1^*}{\frac{1}{\lambda_Л}\ln(r/r_0)}} dr$$

Чтобы получить зависимость τ от r, необходимо проинтегрировать это выражение в пределах от текущего радиуса r до начального радиуса наружной поверхности $r_Н$:

$$\int_0^\tau d\tau = \int_r^{r_Н} \frac{\rho \cdot h \cdot r}{\alpha_В \cdot r \cdot \Delta t_2 - \frac{\Delta t_1^*}{\frac{1}{\lambda_Л}\ln(r/r_0)}} dr$$

© Семенов Ю.В., 2024

Полученный интеграл может быть взят только численным методом.

Но задача намного упростится, если положить t_C = 0 °C.

Считаем, что льдоаккумулятор с полным запасом льда стоит некоторое время без нагрузки, и температуры льда и воды в баке выравниваются до 0 °C. Затем в бак поступает теплая вода, и начинается процесс таяния льда.

Так как температура льда по всей толщине равна нулю, $\Delta t_1^* = 0$, теплоотвода внутрь слоя льда от наружной поверхности льда не будет и, соответственно, $q_1 = 0$.

При отсутствии теплового потока q_1 выражение (4) преобразуется к виду:

$$d\tau = \frac{2\pi \cdot \rho \cdot h \cdot r}{q_2} dr \qquad (10)$$

Подставив сюда значение q_2 из (8), получим после преобразования:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\alpha_B \cdot \Delta t_2}{\rho \cdot h}.$$

Это есть не что иное, как максимальная скорость таяния льда, которая может быть обозначена как $v_{ТЛ}^*$:

$$v_{ТЛ}^* = \frac{\alpha_B \cdot \Delta t_2}{\rho \cdot h}. \qquad (11)$$

Максимальная скорость таяния льда не зависит от r, а определяется теплофизическими характеристиками льда ρ и h и прямо пропорциональна α_B и Δt_2.

На рис. 6 представлена зависимость максимальной скорости таяния льда от температуры воды для различных значений α_B.

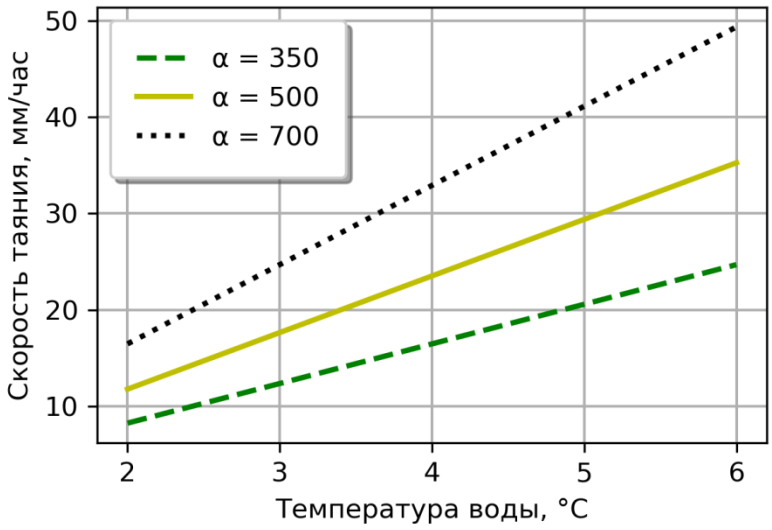


Рис. 6. *Зависимость $v^*_{ТЛ}$ от температуры воды*

© Семенов Ю.В., 2024

На рис. 6 видно, что при увеличении температуры воды с +2 до +6 °С максимальная скорость таяния льда возрастает в 3 раза.

Зная максимальную скорость таяния льда, мы можем рассчитать минимальное время таяния слоя льда толщиной Δ:

$$\tau_{\min} = \frac{\Delta}{v^*_{\text{ТЛ}}} = \frac{\rho h}{\alpha_{\text{В}} \cdot \Delta t_2} \Delta. \qquad (12)$$

Именно такое выражение приведено в [7] для расчета времени таяния слоя льда заданной толщины в зависимости от коэффициента теплоотдачи $\alpha_{\text{В}}$ и температуры воды.

Как видно из формулы (12), $\tau_{\min}$ (как и $v^*_{\text{ТЛ}}$) не зависит от радиуса наружной поверхности льда r.

При подстановке в формулу (12) исходной толщины льда $\delta_{\text{Н}}$ вместо толщины слоя Δ мы получим минимальное время полной разрядки льдоаккумулятора τ_{MIN}.

Пример 1

Льдоаккумулятор с запасом льда 4000 кг выполнен из трубы с наружным диаметром 20 мм. Номинальная толщина льда $\delta_{\text{Н}}$ = 35 мм.

Требуется рассчитать минимальное время полной разрядки аккумулятора при средней температуре воды в баке +3 °С и $\alpha_{\text{В}}$ = 500 Вт/(м^2·К).

Определяем максимальную скорость таяния льда:

$$v^*_{\text{ТЛ}} = \frac{\alpha_{\text{В}} \cdot \Delta t_2}{\rho \cdot h} = \frac{500 \cdot 3}{917 \cdot 3{,}33 \cdot 10^5} = 0{,}491 \cdot 10^{-5} \text{ м/с} = 17{,}7 \text{ мм/час}$$

Минимальное время полной разрядки аккумулятора τ_{MIN} составит:

$$\tau_{\text{MIN}} = \frac{\delta_{\text{Н}}}{v^*_{\text{ТЛ}}} = \frac{35}{17{,}7} \approx 2{,}0 \text{ час}$$

4. Условия второго рода внутри и третьего рода на внешней поверхности льда

Граничные условия второго рода предполагают задание постоянного теплового потока $q_1 = const = q_0$, который не зависит от толщины льда.

Частным случаем таких граничных условий является случай отсутствия теплового потока ($q_1 = 0$), рассмотренный нами выше в п.3.

© Семенов Ю.В., 2024

В современных холодильных установках с компрессорами с регулировкой производительности поддержание постоянного теплового потока можно обеспечить за счет изменения температуры кипения t_0 хладагента в льдоаккумуляторе.

Зависимость t_0 от толщины льда $\delta_Л = r - r_0$ при заданном q_0 может быть получена из формулы (7):

$$t_0 = -\Delta t_1 = -\frac{q_0}{2\pi} \cdot \left[A + \frac{1}{\lambda_Л} \ln (r/r_0)\right],$$

где A определяется по формуле (6).

Для расчета скорости таяния льда при постоянном тепловом потоке ($q_1 = const = q_0$) подставим в выражение (4) разность q_2 и q_0 и получим:

$$d\tau = \frac{\rho \cdot h \cdot 2\pi r}{\alpha_В \cdot 2\pi \cdot r \cdot \Delta t_2 - q_0} dr$$

или

$$\frac{d\tau}{dr} = \frac{\rho \cdot h \cdot r}{\alpha_В \cdot r \cdot \Delta t_2 - q_0/2\pi}. \qquad (13)$$

Перевернув выражение (13), получим скорость таяния льда:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\alpha_В \cdot r \cdot \Delta t_2 - q_0/2\pi}{\rho \cdot h \cdot r} = \frac{\alpha_2 \cdot \Delta t_2}{\rho \cdot h} - \frac{q_0}{2\pi \cdot \rho \cdot h \cdot r}$$

или

$$v_{ТЛ} = v^*_{ТЛ} - \frac{q_0}{2\pi \cdot \rho \cdot h \cdot r} \quad , \qquad (14)$$

где $v^*_{ТЛ}$ — максимальная скорость таяния льда, рассчитанная по формуле (11).

На рис. 7 приведена зависимость $v_{ТЛ}$ от толщины льда при $\alpha_В$ = 500 Вт/(м^2·К) и различных значениях q_0. В отличие от $v^*_{ТЛ}$, скорость таяния $v_{ТЛ}$ зависит от q_0 и снижается при уменьшении r (толщины льда).

Чтобы определить, при каких условиях не происходит таяние льда, приравняем нулю выражение для скорости таяния:

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\alpha_В \cdot r \cdot \Delta t_2 - q_0/2\pi}{\rho \cdot h \cdot r} = 0$$

Откуда получим, что лед не тает, если:

$$2\pi \cdot \alpha_В \cdot r \cdot \Delta t_2 \le q_0 \qquad (15)$$

Чтобы происходило полное стаивание льда с поверхности трубы, должно выполняться противоположное (15) условие при $r = r_0$, то есть:

$$2\pi \cdot \alpha_В \cdot r_0 \cdot \Delta t_2 > q_0, \qquad (16)$$

© Семенов Ю.В., 2024

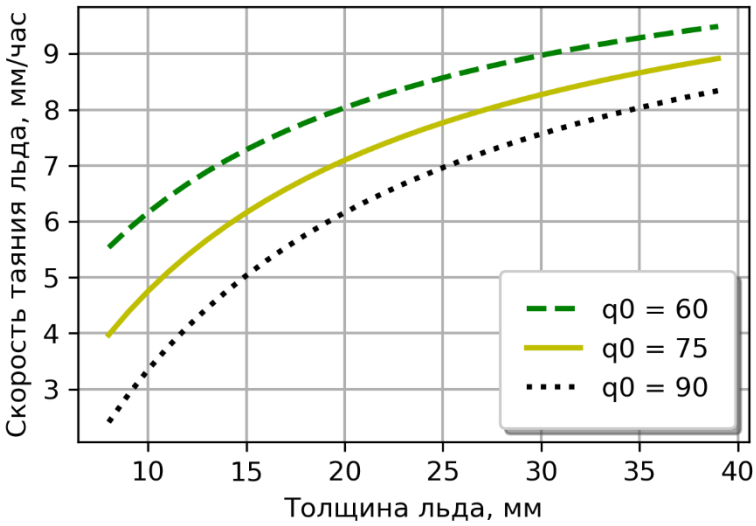


Рис. 7. *Зависимость скорости таяния льда от толщины*

Для расчета времени таяния слоя льда толщиной Δ при постоянном отводе тепла внутрь слоя льда необходимо проинтегрировать следующее выражение, полученное из (13):

$$\int_0^{\tau} d\tau = \int_{r_В}^{r_Н} \frac{\rho \cdot h \cdot r}{\alpha_В \cdot r \cdot \Delta t_2 - q_0/2\pi} dr,$$

где $r_Н$ — радиус поверхности льда в начальный момент времени ($r_Н = r_0 + \delta_Н$),

$r_В$ — радиус внутренней поверхности слоя льда толщиной Δ ($r_В = r_Н - \Delta$).

В результате интегрирования получаем следующую формулу:

$$\tau = \frac{\rho h}{2\pi \Delta t_2^2 \alpha_В^2} \{2\pi \Delta t_2 \alpha_В (r_Н - r_В) + q_0 [\ln(2\pi \Delta t_2 \alpha_В r_Н - q_0) - \ln(2\pi \Delta t_2 \alpha_В r_В - q_0)]\}.$$

Несмотря на ее немного устрашающий вид, результат в системе СИ получается в секундах, что показывает проверка размерностей.

Приведем это выражение к следующему виду:

$$\tau = \frac{\rho h}{\Delta t_2 \alpha_В} (r_Н - r_В) + \frac{\rho h}{2\pi \Delta t_2^2 \alpha_В^2} q_0 \ln\left(\frac{2\pi \Delta t_2 \alpha_В r_Н - q_0}{2\pi \Delta t_2 \alpha_В r_В - q_0}\right). \qquad (17)$$

Первое слагаемое есть не что иное, как минимальное время τ_{min} таяния льда толщиной $\Delta = r_Н - r_В$ (см. формулу (12)).

Тогда выражение (17) может быть записано в следующем виде:

$$\tau = \tau_{min} + \Delta\tau, \qquad (18)$$

© Семенов Ю.В., 2024

где поправка $\Delta\tau$ рассчитывается как:

$$\Delta\tau = \frac{\rho h}{2\pi\Delta t_2^2\alpha_{\text{В}}^2} q_0 \ln\left(\frac{2\pi\Delta t_2\alpha_{\text{В}} r_{\text{Н}} - q_0}{2\pi\Delta t_2\alpha_{\text{В}} r_{\text{В}} - q_0}\right). \qquad (19)$$

То есть постоянный отвод тепла внутрь слоя льда при работающей холодильной установке замедляет, но не прекращает процесс таяния льда (при выполнении условия $q_2 > q_0$).

При вычислении поправки $\Delta\tau$ условие $q_2 > q_0$ должно выполняться и при $r = r_{\text{В}}$, то есть $2\pi\Delta t_2\alpha_{\text{В}} r_{\text{В}} > q_0$, так как логарифм определен только для положительных чисел.

При подстановке в формулу (19) r_0 вместо $r_{\text{В}}$ мы получим поправку к минимальному времени полной разрядки льдоаккумулятора τ_{MIN}.

Пример 2

Для льдоаккумулятора из предыдущего примера определить время полной разрядки при средней температуре воды в баке +3 °С, $\alpha_{\text{В}}$ = 500 Вт/(м^2·К) и q_0=75 Вт/м.

Для трубы с наружным диаметром 20 мм радиус r_0 = 10 мм. При номинальной толщине льда 35 мм радиус наружной поверхности льда $r_{\text{Н}}$ = 10 + 35 = 45 мм.

Проверяем, будет ли происходить полное стаивание льда с поверхности трубы (см. формулу (16)):

$$2\pi \cdot \alpha_{\text{В}} \cdot r_0 \cdot \Delta t_2 > q_0$$

$$2\pi \cdot 500 \cdot 0{,}01 \cdot 3 > 75$$

$$94{,}25 > 75$$

Поправку $\Delta\tau$ к минимальному времени таяния льда τ_{MIN} рассчитываем по формуле (19), подставляя r_0 вместо $r_{\text{В}}$:

$$\Delta\tau = \frac{\rho h}{2\pi\Delta t_2^2\alpha_{\text{В}}^2} q_0 \ln\left(\frac{2\pi\Delta t_2\alpha_{\text{В}} r_{\text{Н}} - q_0}{2\pi\Delta t_2\alpha_{\text{В}} r_0 - q_0}\right) =$$

$$= \frac{917 \cdot 3{,}33 \cdot 10^5}{2\pi \cdot 3^2 \cdot 500^2} \cdot 75 \cdot \ln\left(\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 500 \cdot 45 \cdot 10^{-3} - 75}{2\pi \cdot 3 \cdot 500 \cdot 10 \cdot 10^{-3} - 75}\right) = 4695 \text{ с} \approx 1{,}3 \text{ час}$$

Время полной разрядки аккумулятора при τ_{MIN} = 2,0 час (см. пример 1) составит:

$$\tau = \tau_{\text{MIN}} + \Delta\tau = 2{,}0 + 1{,}3 = 3{,}3 \text{ час}$$

То есть при постоянном теплоотводе q_0= 75 Вт/м время полного стаивания льда с поверхности трубы увеличилось более чем в полтора раза.

© Семенов Ю.В., 2024